ファイナンス理論

浦谷 規

1995

1 派生証券

派生証券 (Derivative Security) は 条件付証券 (Contingent Claim) ともよばれ、将来のその証券の支払が他の証券 (Underlying Security) の価格を条件とする証券 (契約)
オプション、先渡し契約、先物契約、スワップ など

派生証券の理論 (オプション理論)
Black-Scholes 1973
Merton 1973
Cox-Ross 1976
Harrison-Kreps 1979

1.1 オプション

コールオプション
Underlying Security を株価 S_t とすると、T 日後に発行者 (option writer) から K 円で株を買う権利
従って、必ずしも買わなくてよい
T 日後には
$S_T > K$ のとき、オプション購入者 (option holder) が株を K 円で買う権利を行使すると、$S_T - K$ 円の利益
$S_T \leq K$ のとき、オプション購入者が株を K 円で買わないので、0 円の利益
この権利を $t = 0$ のときに、いくらで売買すればよいか?
この価格をオプション価格 (option premium) という。

プットオプション
T 日後に発行者 (option writer) に K 円で株を売る権利
T 日後には
$S_T < K$ のとき、オプション購入者 (option holder) が株を K 円で売る権利を行使すると、$K - S_T$ 円の利益
$S_T \geq K$ のとき、オプション購入者が株を K 円で売らないので、0 円の利益

1.2 先物契約と先渡し契約

ある財貨を T 日後に、K 円で買う契約 T 日後には
$S_T > K$ のとき、$S_T - K$ 円の利益
$S_T \leq K$ のとき、$S_T - K$ 円の損失
契約時に、金銭授受はない
K (先物価格) をいくらにすればよいか?

1.3　スワップ

信用格差のある 2 つの企業、A 社と B 社が債務支払を交換し、返済額の軽減化を行なう。

	固定金利	変動金利
A 社	5 %	基準金利+0.5%
B 社	7 %	基準金利+0.7%

A 社は 5 %の固定を借り入れ、6 %でＢ社に貸す。
B 社は変動基準金利＋ 0.7 %を借り入れ、同率で A 社に貸す。
この債務の交換の結果、
A 社は変動基準金利–0.3 %を借り、
B 社は 6 %の固定を借り入れたことのなる。

1.4　フィナンスの基本原理

裁定取引が存在しない価格が均衡価格である
定義
裁定取引 (Arbitrage) とは、0 以下の投資額で将来に正の受取がある取引

従って、裁定取引可能な価格が存在すると、投資に必要な資金は 0 であるからその投資対象を無限に契約し、無限の利益をあげることができる。この時市場ではその価格が上昇し、裁定取引が存在しない価格で均衡する。次に示す単純な例で考えてみよう。

1. 負の利子率

   金利ー１０%でで１００万円１年間借りたとしよう。１年後に元利合計として、$100(1-10\%)=90$ を返済するので、借金をするときに１０万円の利益が得られる。

2. 株価が一旦零以下になり、再び正の価格になる

   株価が零以下の時に株を買い、正になったときに株を売ると確実に正の利益が得られる。

   以上の例が一般的に存在するとは考えがたい。裁定取引ができないためには、
   利子率 >0
   金融商品価格　>0
   でなければならない。

3. オプションを利用した裁定取引

   株価を 40、コールオプションの満期が 3 カ月、その行使価格が 30、オプションの価格が 10 とする。安全資産利子率を 3 カ月間で 10 %とする。

裁定取引

（１）1 株を借りて売る　　+40

（２）コールオプションの買う　　　-10

（３）合計 +30

（４）3 カ月後

合計額 30 を安全資産で 3 カ月間運用すると、$30 * 1.10 = 33$ となる。

（イ）株価　＞　３０　(in-the-money) の時、オプションを行使し、株を返却。

33　- 30　＝3

（ロ）株価　＜　30 (out-of-the-money) の時、株を買いそれを返す。

33　- 株価　＞3

いずれの場合も、零の投資が正の利益を生む

Part I
伊藤積分

2　はじめに

2.1　Black-Scholes のオプション価格モデル

危険資産と安全資産のポートフォリオ

１）安全資産

時刻　t における価格：B_t

一定金利:r

$$\frac{dB_t}{B_t} = rdt$$

２）危険資産

時刻　t における価格：S_t

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dw_t$$

w_t は標準ブラウン運動

w_t は微分不可能

$$dB_t = rB_t dt$$

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dw_t$$

$$B_t = B_0 \exp(rt)$$

$$S_t = S_0 \exp(\sigma w_t + (\mu - \frac{\sigma^2}{2})t)$$

ヨーロッパ　コール　オプション

P.Samuelson 1965

F.Black and M.Scholes 1973

W.Merton 1973

満期　T , 行使価格 Kの black-Scholes のコールオプション式

$$C(S_t, t) = S_t \phi(d) - K exp(-r\tau)\phi(d - \sigma\sqrt{\tau})$$

$$\tau = T - t, \quad d = \frac{\log(S_t/K) + (r + \sigma^2/2)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}$$

なぜオプション価格は μ に依存しないのか？

2.2 確率積分の目標

$\int x_t dw_t$ の定義

仮定

1）w_t はブラウン運動

2）x_t は適応プロセス (adapted to w_t filteration)

3）

$$P(\int_0^t x_s^2 ds < \infty) = 1; \quad \forall t > 0$$

3 積分の復習

Rieman-Stieltjes 積分

$$\int_a^b f(x)dg(x)$$

p: $[a, b]$ の有限分割

$$a = x_0 \leq x_1 \leq \cdots \leq x_n = b$$

$$\Delta^p x_i = x_i - x_{i-1}$$

関数 f,　g は $[a, b]$ 上の関数

各 p に対して、

$$\Delta^p g_i = g(x_i) - g(x_{i-1})$$

$$M_i^p = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$$

$$m_i^p = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$$

f が　g に関して積分可能とは

$$\inf_p U(f, g, p) = \sup_p L(f, g, p)$$

ただし、

$$U(f, g, p) = \sum_{i=1}^n M^p{}_i \Delta^p g_i$$

$$L(f, g, p) = \sum_{i=1}^n m^p{}_i \Delta^p g_i$$

R-S 積分の性質

1 積分定理

$[0,t]$ で f が連続で、g が増加関数 (有界変動) ならば、

$$\int_0^t f dg$$

は定義される。

このとき、

$$\int_0^t f(x)dg(x) = \lim_{\Delta^p \to 0} \sum f(\xi_i)[g(x_i) - g(x_{i-1}))]$$

ただし、$x_i \leq \xi_i \leq x_{i-1}$

2 部分積分

f が g に関して積分可能であることの必要十分条件は g が f に関して積分可能であること。

この時、

$$\int_0^t f dg = [fg]_0^t - \int_0^t g df$$

略証

$$[fg]_0^t = f(t)g(t) - f(0)g(0) = \sum f(x_i)g(x_i) - f(x_{i-1})g(x_{i-1})$$

$$\int f(x)dg(x) = \lim \sum f(\xi_i)(g(x_i) - g(x_{i-1}))$$

$$\begin{aligned} [fg]_0^t - \int f(x)dg(x) &= \lim[\sum g(x_i)(f(x_i) - f(\xi_i)) + \sum g(x_{i-1})(f(\xi_i) - f(x_{i-1})] \\ &= \int g df \end{aligned}$$

4 有界変動関数

関数 $f(t)$ が

$$f : [0, \infty] \to R$$

定義

$f(t)$ が有限変動関数 (Variation Finite, VF) であるとは

$$V_t(f) = \sup_p \sum |f(t_i) - f(t_{i-1})|$$

すべての t にたいして、$V_t(f) < \infty$ である。

また、すべての t にたいして、$V_t(f) <$ 定数の時、f は Bounded Variation という。

定理

右連続関数 f が VF あることの必要十分条件は

$$f(t) = f(0) + g(t) - h(t),$$

となる 2 つの右連続単調増加関数 g と h で表せることである。

証明

$$\begin{aligned} V_f(t) &= \sup \sum |g(t_i) - g(t_{i-1}) - (h(t_i) - h(t_{i-1}))| \\ &\le \sup \sum |g(t_i) - g(t_{i-1})| + |h(t_i) - h(t_{i-1})| \\ &= V_g(t) + V_h(t) < \infty \end{aligned}$$

ただし

$$V_g(t) = g(t) - g(0) < \infty$$

$$V_h(t) = h(t) - h(0) < \infty$$

定理

f が連続で g が VF の時

$\int fdg$ と $\int gdf$ が存在し、部分積分可能となる。

注意

１）$\int xdw$ は x が VF ならば、$R-S$ の意味で定義可能である。

２）$\int wdw$ はいまだ定義されない

4.1 ２次変動関数 (Quadratic Variation)

定義 : 2 次変動関数

$$\forall f(t) : [0, \infty] \to R \quad \forall t$$

$$q_f(t) = \sup_{\Delta^p} \sum_{i=1}^{n} [f(t_i) - f(t_{i-1})]^2$$

すべての t にたいして、$q_f(t) < \infty$ のときに、$f(t)$ は、２次変動関数である。

定理

f が連続で、VF の時、$q_f(t) = 0$

証明

$$\sup \sum |f(t_i) - f(t_{i-1})| < \infty$$

$$\sup \sum |f(t_i) - f(t_{i-1})|^2 \leq \sup K \sum |f(t_i) - f(t_{i-1})| \to 0$$
$$K = max|f(t_i) - f(t_{i-1})|$$

5　ブラウン運動

定義

ブラウン運動 $w(t)$ は次の条件を満たす確率過程。

1 $w(t) - w(s) \sim N(0, t-s)$

2 $w(t) - w(s)$ は過去の $w(u)$ $(0 \leq u \leq s)$ と独立

(注)

1 BM は独立な増分を持つ

2 $w(0) = 0$, $w(t) \sim N(0, t)$

3 $\Pr(w(t) \in (a, b)) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp(-x^2/2t)dx$

ブラウン運動 (BM) の実現値 (標本パス) の性質

1 時間に関して連続

2 どんな小さな区間でも単調関数でない

3 どんな時点においても微分不可能

4 どんな小さな区間でも infinite variation である

5 BM は QV である

(注 4)

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} |w(t_i) - w(t_{i-1})| &= \sum_{i=1}^{n} \frac{(w(t_i) - w(t_{i-1}))^2}{|w(t_i) - w(t_{i-1}|} \\
&\geq \sum_{i=1}^{n} \frac{(w(t_i) - w(t_{i-1}))^2}{\max_{1 \leq i \leq n} |w(t_i) - w(t_{i-1})|}
\end{aligned}$$

分子の期待値は

$$E[(w(t_i) - w(t_{i-1}))^2] = t_i - t_{i-1}$$

だから、t となる。一方、分母は

$$\max_{1\leq i\leq n}|w(t_i)-w(t_{i-1})|\to 0$$

定理

BM の区間 $[0,t]$ の 2 次変動関数は t である。

略証

$$E[\sum|w(t_i)-w(t_{i-1})|^2]=\sum(t_i-t_{i-1})=t-0=t$$

$$Var[\sum|w(t_i)-w(t_{i-1})|^2]\to 0$$

系

w_tが $BM(\mu,\sigma)$ であり、

$$q_t(w)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{2^n-1}[w(t_{k+1}^n,\omega)-w(t_k^n,\omega)]^2$$

ならば、

$$\Pr[q_t(w)=\sigma^2 t]=1$$

確率積分

w はブラウン運動 $BM(\mu,\sigma)$

$$\int_0^t wdw=\sum_{k=0}^{2^n-1}w(t_k^n)[w(t_{k+1}^n)-w(t_k^n)]$$

ただし

$$t_k^n=tk/2^n,\quad \text{区間}\quad [t(k+1)/2^n,tk/2^n)$$

$$\begin{aligned}\int_0^t wdw &= 1/2\sum_{k=0}^{2^n-1}(w^2(t_{k+1}^n)-w^2(t_k^n))\\ &\quad -(w^2(t_{k+1}^n)+w^2(t_k^n)-2w(t_{k+1}^n)w(t_k^n))\\ &= 1/2\sum_{k=0}^{2^n-1}(w^2(t_{k+1}^n)-w^2(t_k^n))\\ &\quad -1/2\sum_{k=0}^{2^n-1}(w(t_{k+1}^n)-w(t_k^n))^2\\ &\to 1/2w^2(t)-1/2\sigma^2 t\end{aligned}$$

6　伊藤積分　I

$\int x dw$ の定義の条件

（１）w は標準ブラウン運動

（２）x は適応過程 (adopted process)

（３）$P(\int_0^t x^2 ds < \infty) = 1$

伊藤積分の定義を次の順で行う。

（１）x がシンプルプロセス (simple process) の時に、$\int xdw$ の定義

x がシンプルプロセス (simple process) とは、

確率変数 x が、

$$\forall\omega \quad x(t,\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} x(t_{k-1},\omega) 1_{[t_{k-1},t_k]}$$

とあらわされる。ただし、

$$0 = t_0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_k \to \infty$$

（２）近似

$I_t(x) \int_0^t x(s)dw(s)$ を $\int_0^t x_n(s)dw(s)$ の列で近似

ただし、x_n がシンプルプロセス (simple process) で、

$$x_n \to x, as \quad n \uparrow \infty$$

（３）$I_t(x)$ のプロセス

$$I(x) \equiv \{I_t(x), t \geq 0\}$$

ただし、$I_t(x) = \int_0^t xdw$ とすると、

$I(x)$ は連続

6.1　仮定と定義

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$: 確率空間

w : $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上の標準ブラウン運動

(1) $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ が完備であるとは、

$$A \in \mathcal{F} \text{ かつ } P(A) = 0 \text{ かつ } B \subseteq A \Rightarrow B \in \mathcal{F}, P(B) = 0$$

(2) $\mathcal{F}_0$ は全ての $P(A) = 0$ の集合 A を含む。

6.2　関数のクラス

$$H = \{x : x \text{ は適応過程}, \quad \Pr(\int_0^t x^2 ds < \infty) = 1\}$$

$$S = \{x : x \text{ はシンプルプロセスでかつ適応過程 }\}$$

$$H^2 = \{x : x \text{ は適応過程}, E(\int_0^t x^2 ds) < \infty, \forall t\}$$

明らかに、

$$H^2 \subset H$$

$$S^2 = \{x : x \text{ はシンプルプロセスでかつ } x \in H^2\}$$

定義

（１）L^2 ノルム

x が確率変数、

$$\|x\| = [E(x2)]^{1/2}$$

（２）H^2 ノルム

x が H^2 に含まれるプロセスで、決まった t に対して、

$$\|x\|_t = [E\int_0^t x^2 ds]^{1/2}$$

（３）L^2 空間

$$L^2 = \{x : (\Omega, \mathcal{F}, P) \to R, \quad \|x\| < \infty\}$$

(4) L^2 収束

$x_1, x_2, \cdots \in L^2$ が、

$$\|x_n - x\| \to 0, \quad n \uparrow \infty$$

の時に、

$$x_n \to x, \quad x \in L^2$$

L^2 収束するという。

(5) コーシー列

$\{x_n\} \subset L^2$がコーシー列であるとは、十分おおきな n, m に対して、$\|x_n - x_m\|$ が十分小さい。

(6)L^2 が完備

L^2 が完備であるとは、すべてのコーシー列の極限が L^2 の中にある。

(7)H^2 収束

$$x_1, x_2, \cdots \in H^2 \text{かつ} \|x_n - x\|_t \to 0 \quad as \quad n \uparrow \infty$$

のとき、x_n は x に H^2 収束するという。

6.3 伊藤積分をシンプルプロセスで近似

$I_t(x), x \in H^2$ に対して、$\{I_t(x_n)\}, x_n \in S^2$で近似する。

$x_n \in S^2$ のときには、

$$I_t(x_n) = \int_0^t x_n dw$$

は $R - S$ の意味で定義可能である。

$$I_t(x_n) = \int_0^t x_n dw = \lim_{N \to \infty} \sum_{k=0}^{N-1} x_k^{(n)} [w(t_{k+1}) - w(t_k)]$$

定理１

$$x_n \to x \in H^2 \quad , as \quad n \uparrow \infty$$

のとき

$$x \in H^2 \Rightarrow \exists I_t(x) \in L^2$$

$$s.t. \quad I_t(x_n) \to I_t(x) \quad \in L^2 \quad \{x_n\} \in S^2$$

さらに、

$$E[I_t(x)] = 0, \quad \|I_t(x)\| = \|x\|_t$$

i.e.

$$E \int_0^t x dw = 0, \quad E[(\int_0^t x dw)^2] = E[\int_0^t x^2 ds]$$

補助定理１

S^2 は H^2 の中で稠密である。

すなわち、

$$\forall x \in H^2; \quad \exists simple \quad process \{x_n\} \subset S^2$$

$$s.t. \quad x_n \to x \in H^2 \quad as \quad n \uparrow \infty$$

証明

$$\|I_t(x_n) - I_t(x_m)\| = \|I_t(x_n - x_m)\| = E[\int_0^t (x_n - x_m)dw]^2$$

$$E[\int_0^t (x_n - x_m)dw]^2 = E[\int_0^t (x_n - x_m)^2 ds] = \|x_n - x_m\|_t$$

$\{x_n\}$ は H^2 でコーシー列であるから、$\|I_t(x_n)\|$ は L^2でコーシー列となる。

S^2は L^2-完備であるから S^2に $\{x_n\}$ は存在する。

補助定理２

$$x \in S^2 \Rightarrow (a) \quad E[I_t(x)] = 0 \quad (b) \quad \|I_t(x)\| = \|x\|_t$$

証明

(a)

$$\begin{aligned}
E[I_t(x)] &= E\int_0^t x_n(s)dw(s) \\
&= \lim_{N\to\infty} \sum_k E[\xi_k(w(t_{k+1}) - w(t_k))] \\
&= \lim_{N\to\infty} \sum_k E(E[\xi_k(w(t_{k+1}) - w(t_k))|\mathcal{F}_{t_k}]) \\
&= 0
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
I_t^2(x) \text{ のリーマン和} &= \sum_k \xi_k^2[w(t_{k+1}) - w(t_k))]^2 \\
&\quad +2\sum_k \sum_{k\neq j} \xi_k\xi_j[w(t_{k+1}) - w(t_k))][w(t_{j+1}) - w(t_j))]
\end{aligned}$$

だから、

$$\|I_t(x)\|^2 = E[I_t^2(x)]$$

$$\begin{aligned}
I_t^2(x) \text{ のリーマン和の期待値} &= \sum_k E(E[\xi_k^2[w(t_{k+1}) - w(t_k))]^2|\mathcal{F}_{t_k}]) \\
&\quad +2\sum_k \sum_{k\neq j} E(E[\xi_k\xi_j[w(t_{k+1}) - w(t_k))][w(t_{j+1}) - w(t_j))]|\mathcal{F}_{t_k}]) \\
&= \sum_k E(\xi_k^2)(t_{k+1} - t_k) + 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|I_t(x)\|^2 &= E\int_0^t x^2 ds \\ &= \|x^2\|_t^2 \end{aligned}$$

定理１の証明

補助定理１から S^2 は L^2-完備だから、

$$\exists I_t(x) \in S^2 \quad s.t. \quad I_t(x_n) \to I_t(x) \in L^2$$

収束定理 (Dominated Convergence Theorem) から、

$$E[I_t(x_n)] \to E[I_t(x)] = 0$$

および、

$$E[I_t^2(x_n)] \to E[I_t^2(x)]$$

したがって、

$$\|I_t(x)\| = \|x\|_t$$

6.4 BM のシンプルプロセス近似

シンプルプロセス $x_n(\cdot,\omega)$ によって、次のように BM を近似する。

$$x_n(s,\omega) = w(\frac{tk}{2^n},\omega); \quad s \in [\frac{tk}{2^n}, \frac{t(k+1)}{2^n}]$$

ただし、$w(t,\omega)$ は BM である。

（１）x_n は適合過程である

（２）$x_n \to w \in H^2$

なぜなら、

$$\begin{aligned} \|w - x_n\|_t^2 &= E\int_0^t (w(s) - x_n(s))^2 ds \\ &= \sum_{k=0}^{2^n-1} \int_0^{t/2^n} E[w(s + kt/2^n) - w(kt/2^n)]^2 ds \\ &= \sum_{k=0}^{2^n-1} \int_0^{t/2^n} s ds \\ &= 2^n 1/2 (1/2^n)^2 \\ &\to 0 \quad as \quad n \uparrow \infty \end{aligned}$$

したがって、定理１より

$$I_t(x_n) \to I_t(w)$$

と収束し、

$$\int_0^t wdw = 1/2w^2 - 1/2t$$

となる。

6.5 伊藤積分の連続性

$$I_t(x) = \int_0^t xdw, \quad \forall t > 0$$

プロセス $I(x) = \{I_t(x), t \geq 0\}$ を定義したとき、$I(x)$ は連続となるか

定理

ある $x \in H$ にたいして、

$$\forall t > 0, \quad \exists \{x_n\} : simple, \quad adapted \quad process$$

$$s.t. P(\int_0^t [x_n(t) - x(s)]^2 ds \leq (1/2)^n) = 1$$

定理

ある $x \in H$ に対して、零集合以外に対して唯一のプロセス $Z(s)$ が存在し、次の条件を満たす。

ある $t > 0$ に対して、

$$\exists \{x_n\} : adapted, simple$$

$$Z_n(s) = \int_0^s x_n dw$$

$$P(\sup_{0 \leq s \leq t} |Z_n(s) - Z(s)| \to 0\,, as \quad n \uparrow \infty) = 1$$

定義

プロセス $Z(s)$ を $\int_0^s xdw$ と定義する

注意

（１）$\int xdw$ はすべての $x \in H$ に対して定義される

（２）定理は

$$Z_n(t) \to Z(t),\ as\, n \uparrow \infty$$

かつ、コンパクトな集合に一様収束する。なぜなら、x_n の x への収束が十分速いからである。

従って、$Z(s)$ は適合的で連続である。

（３）ある t に対して、

$$Z_t = I_t(x)$$

となる。

6.6　伊藤公式（伊藤のレンマ）

定義

伊藤プロセス $Z(t)$ は次の形で表現される、

$$Z(t) = Z(0) + \int_0^t x dw + A(t)$$

ただし、

(a) w は $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上の標準ブラウン運動（$Z(0) \in \mathcal{F}_0$）

(b) $x \in H$

(c) A は連続、適合的、そして VF

注意

（１）Z は、連続で適合的

（２）$\int_0^t xdw$ はブラウン運動の部分で、A は VF の部分

（３）$dZ = xdw + dA$ と略記し、伊藤微分とよぶ。

定理（伊藤公式　I）

$$f : R \to R$$

f は２階微分可能

Z は伊藤プロセスでその微分は、

$$dZ = xdw + dA$$

このとき、

$$f(Z) = f(Z_0) + \int_0^t f'(Z)xdw + \int_0^t f'(Z)dA + \frac{1}{2}\int_0^t f''(Z)x^2 ds \quad (1)$$

注意

(a) (1) 式は次のとおりに略記される。

$$\begin{aligned} df(Z) &= f'(Z)xdw + f'(Z)dA + \frac{1}{2}f''(Z)x^2 dt \qquad (2) \\ &= f'(Z)dZ + \frac{1}{2}f''(Z)x^2 dt \end{aligned}$$

(b) Z が VF なら、

$$df(Z) = f'(Z)dZ$$

(c)Z が伊藤プロセスで、関数 f が良い性質なら、

$f(Z)$ も伊藤プロセスになる。

(d) $f(x) = x^2$, $Z = w = \int dw$ の時、

伊藤の公式より、

$$f(Z) = w^2 = \int_0^t 2wdw + \frac{1}{2}\int_0^t 2ds$$

故に、

$$\int_0^t wdw = \frac{1}{2}w^2(t) - \frac{t}{2}$$

(e) 式 (2) はさらに、

$$df(Z) = f'(Z)dZ + \frac{1}{2}f''(Z)(dZ)^2$$

と略記できる。ただし、

$$(dZ)^2 = (xdw + dA)^2 = x^2(dw)^2 + 2xdwdA + (dA)^2$$

$$(dw)^2 = dt, \quad dAdw = dwdA = (dA)^2 = 0$$

$$(dZ)^2 = x^2dt$$

証明

$Z = w$ として、

$$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = t$$

$$f(w_t) - f(w_0) = \sum_{k=0}^{n-1}[f(w_{k+1}) - f(w_k)]$$

各増分にテイラー展開をすると、

$$f(w_{t_{k+1}}) = f(w_{t_k}) + f'(w_{t_k})[w(t_{k+1}) - w(t_k)] + \frac{1}{2}f''(\xi_k)[w(t_{k+1}) - w(t_k)]^2$$

ただし、

ξ_k は $[w(t_k), w(t_{k+1})]$ の値

ブラウン運動は連続だから、

$\xi = w(\tau_k)$ となる τ_k が区間 $[t_k, t_{k+1}]$ に存在する

$$\sum_{k=0}^{n-1} f'(w(t_k))[w(t_{k+1}) - w(t_k)] \to \int_0^t f'(w)dw$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} f''(w(\tau_k))[w(t_{k+1}) - w(t_k)]^2 \to \int_0^t f''(w)ds$$

7 伊藤積分と Wiener 積分

伊藤積分はマルチンゲール

$$\int_0^t x(t)dw(t)$$

$x(t)$ は適合的確率プロセス

その平均は 0 である

$$E[\int_0^t x(t)dw(t)] = E[\sum x(t_i)[w(t_{i-1}) - w(t_i)]]$$

$x(t_i)$ $[w(t_{i-1}) - w(t_i)]]$ は独立だから、

$$E[\int_0^t x(t)dw(t)] = 0$$

c.f.

$$E(I_t(x)) = 0$$

その分散は

$$Var[\int_0^t x(t)dw(t)] = \int_0^t E[x(s)^2]ds$$

c.f.

$$\|I_t(x)\| = \|x\|_t$$

Wiener 積分は次の通りの正規分布に従う

$$\int_0^t f(t)dw(t)$$

$f(t)$ は適合的プロセス

その平均は 0 である

$$E[\int_0^t f(t)dw(t)] = 0$$

その分散は

$$Var[\int_0^t f(t)dw(t)] = \int_0^t E[f(s)^2]ds$$

の正規分布になる

$$
\begin{aligned}
E[(\int_0^t f(t)dw(t))^2] &= E[\lim(\sum f(t_i)[w(t_{i-1})-w(t_i)])^2] \\
&= \lim E[\sum(f(t_i)[w(t_{i-1})-w(t_i)])^2] \\
&= \int_0^t f(s)^2 ds
\end{aligned}
$$

Feynman-Kac 定理

Feynman-Kac 定理

確率微分方程式

$$
dx_t = \mu(x_t,t)dt + \sigma(x_t,t)dw_t, \quad x_s = X, \quad s \le t \le T
$$

に対して、微分演算子 D

$$
DV = \frac{1}{2}V_{xx}\sigma^2 x^2 + V_x \mu x + V_t
$$

と定義する。
ただし、$V = V(x,t), \quad \mu = \mu(x,t), \quad \sigma = \sigma(x,t)$
PDE が

$$
DV - \rho V + u = 0
$$

であり、その境界条件が

$$
V(x_T,T) = g(x_T,T)
$$

ならば、

$$
V(x,s) = E[\int_s^T e^{-\phi(s)}u(x_s,s)ds + e^{-\phi(T)}g(x_T,T)]
$$

ただし、

$$
\phi(t) = \int_s^t \rho(x_s,s)ds
$$

補題

PDE が

$$
DV + u = 0, \quad V(x,T) = g(x,T)
$$

ならば、

$$
V(x,s) = E[\int_s^T u(x_s,s)ds + g(x_T,T)]
$$

ただし

$$dx_t = \mu(x_t, t)dt + \sigma(x_t, t)dw_t, \quad x_s = x, \ \ s \le t \le T$$

証明

伊藤の公式より

$$V(x_T, T) - V(x, s) = \int_s^T DV dt + \int_s^t V_x \sigma dw_t$$

期待値をとると、

$$E[g(x, T) + \int_s^T u(x, u)du] = V(x, s)$$

定理の証明

$$V^*(x, t) = e^{-\phi(t)} V(x, t)$$

$$g^*(x, T) = e^{-\phi(T)} g(x, T)$$

$$u^*(x, t) = e^{-\phi(t)} u(x, t)$$

と定義すると、

$$DV^* + u^* = 0$$

および

$$V^*(x, T) = g^*(x, t)$$

Part II

Black-Schles のオプション式と無裁定取引

8 Black-Scholes Model

株価 S_t は幾何ブラウン運動の SDE を満たすと仮定する、

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dw_t, \qquad \sigma > 0$$
$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dw_t$$

安全資産（債券）は次の ODE を満たすとする。

$$dB_t = rB_t dt$$

$$B_t = B_0 e^{rt}$$

ただし、μ, σ, r は定数
取引戦略 ψ_tは 株式 a_t 株と安全資産 b_t 枚からなるとする。

$$\psi_t = (a_t, b_t) \quad : \text{predictable process}$$

定義
$\{\psi_t\}$ が自己調達戦略であるとは

$$a_t S_t + b_t B_t = a_0 S_0 + b_0 B_0 + \int_0^t a_s dS_s + \int_0^t b_s dBs$$

を満たすことである。

定義
Claim（派生証券の将来の支払い）X が Attainable とは

$$X : random\ var.\ \ on\ \ (\Omega, \mathcal{F}_T), \quad E|X| < \infty$$

$X = a_T S_T + b_T B_T$を満たす自己調達戦略 $\{\psi_t\}$ が存在することである。
このとき、$t = 0$ におけるポートフォリオの価値

$$C(S_0, 0) = a_0 S_0 + b_0 B_0$$

が X の価格となる。

定理
Black-Scholes model では、すべての Claim は Attainable である。
このとき、市場は完備であるという。

9 Black Scholes model における派生証券の PDE

Attainable Claim X の t における複製ポートフォリオの価値を

$$C(S_t,t) = a_tS_t + b_tB_t \quad 0 \le t \le T$$

とすると、自己調達戦略なので

$$\begin{aligned} C(S_t,t) &= a_tS_t + b_tB_t = a_0S_0 + b_0B_0 \\ &+ \int_0^t a_s dS_s + \int_0^t b_s dB_s \end{aligned} \tag{3}$$

伊藤のレンマより

$$dC = C_x dS_t + C_t dt + \frac{1}{2}C_{xx}\sigma^2 S_t^2 dt$$

S_tの SDE から

$$dC = C_x\mu S_t dt + C_x\sigma S_t dw_t + C_t dt + \frac{1}{2}C_{xx}\sigma^2 S_t^2 dt$$

微分演算子を

$$DC(x,t) = \frac{1}{2}C_{xx}\sigma^2 x^2 + C_x\mu x + C_t$$

とすると

$$C(S_t,t) = C(S_0,0) + \int_0^t DC(S_s,s)ds + \int_0^t C_x(S_s,s)\sigma S_s dw_s \tag{4}$$

式 (1),(2) より

$$\int_0^t a_s dS_s + \int_0^t b_s dB_s = \int_0^t DC(S_s,s)ds + \int_0^t C_x(S_s,s)\sigma S_s dw_s$$

さらに、

$$\int_0^t a_s dS_s = \int_0^t a_s\mu S_s ds + \int_0^t a_s\sigma S_s dw_s$$

を用いると、

$$\int_0^t [a_s\sigma S_s - \sigma S_s C_x]dw_s = \int_0^t [DC(S_s,s) - b_s r B_s - a_s\mu S_s]ds$$

両辺は0でなければならないから、

$$a_t = C_x(S_t,t), \qquad b_t = \frac{DC(S_t,t) - C_x(S_t,t)\mu S_t}{rB_t}$$

の複製戦略がえられる。これを

$$C(S_t,t) = a_t S_t + b_t B_t$$

に代入すると、

$$C(S_t,t) = C_x(S_t,t)S_t + \frac{DC(S_t,t) - C_x(S_t,t)\mu S_t}{rB_t}B_t$$

かくして、派生証券 $C(x,t)$ が満たすべき次の PDE がえられる。

$$\frac{1}{2}C_{xx}\sigma^2 x^2 + C_x r x + C_t - rC = 0 \tag{5}$$

境界条件は、Claim X の T における支払いを $g(S_T)$ とすれば

$$C(x,T) = g(x), \qquad x > 0$$

例えば、コールオプションでは

$$g(S_T) = \max(S_T - K, 0)$$

であり、Black-Scholes が求めた解が有名なオプション公式

$$C(S_t,t) = S_t\Phi(d) - K\exp(-r(T-t))\Phi(d - \sigma\sqrt{T-t}) \tag{6}$$

$$d = \frac{\log(S_t/K) + (r + \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

ただし、

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-t^2/2}dt$$

プットオプションでは、

$$g(S_T) = \max(K - S_T, 0)$$

プットオプションの価格は

$$P(S_t,t) = C(S_t,t) + K\exp(-r(T-t)) - S_t$$

10　派生証券の PDE の解法

Feynman-Kac 定理
微分演算子 D

$$DV = \frac{1}{2}V_{xx}\sigma^2 x^2 + V_x \mu x + V_t$$

ただし、$V = V(x,t), \quad \mu = \mu(x,t), \quad \sigma = \sigma(x,t)$
PDE が

$$DV - \rho V + u = 0, \quad V(x,T) = g(x,T)$$

ならば、

$$V(x,S) = E[\int_S^T e^{-\phi(s)} u(X_s, s)ds + e^{-\phi(T)} g(X_T, T)]$$

ただし

$$dX_t = \mu(X_t, t)dt + \sigma(X_t, t)dw_t, \qquad X_S = x, \quad S \leq t \leq T$$

および

$$\phi(t) = \int_S^t \rho(X_s, s)ds$$

Black-Scholes Model の PDE は (3) から、

$$DC - rC = 0$$

ただし

$$DC = \frac{1}{2}C_{xx}\sigma^2 x^2 + C_x r x + C_t$$

Feynman-Kac の定理より

$$C(x,S) = E[e^{-r(T-S)} g(X_{T-S})]$$

ただし

$$X_t = x + \int_S^t r X_s ds + \int_S^t \sigma X_s dw_s, \quad S \leq t \leq T$$

$\Leftrightarrow$

$$dX_s = r X_s ds + \sigma X_s dw_s, \quad 0 \leq s \leq T - t, \quad X_0 = x \tag{7}$$

この幾何ブラウン運動の SDE は伊藤のレンマから

$$X_t = x \exp\{(r - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma w_t\}$$

したがって、

$$w_t/\sqrt{t} \sim N(0,1)$$

を用いると、

$$C(S_t,t) = e^{-r(T-t)}E[g(S_t e^{(r-\sigma^2/2)(T-t)+\sigma w_{T-t}})]$$

から、Black-Scholes のオプション公式 (4) がえられる。

11 マルチンゲールとギルサノフ定理

確率過程 $\{X_t, t \geq 0\}$ が増大情報系 $\mathbf{F} = \{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ の下でマルチンゲールであるとは、

$$E(X_{t+s}|\mathcal{F}_t) = X_t, \quad s > 0$$

定理 [Girsanov]

$$w_t : Brownian\ Motion\ on\ \ (\Omega, \mathbf{F}, P)$$

$$\theta_t : adapted, \quad \int_0^T \theta_t^2 dt < \infty$$

$$Z_t = \exp(\int_0^t \theta_s dw_s - \frac{1}{2}\int_0^t \theta_s^2 ds)$$

とおくと、Z_t がマルチンゲールならば、

$$w_t^* = w_t - \int_0^T \theta_s ds$$

で定義されるプロセス $\{w_t^*\}$ は確率測度 Q のもとでブラウン運動になる。ただし、

$$Q(d\omega) = Z_T P(d\omega) = \exp(\int_0^T \theta_s dw_s - \frac{1}{2}\int_0^T \theta_t^2 ds)P(d\omega)$$

応用

$$dS_t = \mu(S_t,t)dt + \sigma(S_t,t)dw_t$$

drift 項をμ から f にするには、

$$\theta_t = \frac{f(S_t,t) - \mu(S_t,t)}{\sigma(S_t,t)}$$

とおくと、

$$w_t^* = w_t - \int_0^t \theta_s ds$$

は、Q のもとで標準ブラウン運動になる。

$$\begin{aligned} dw_t^* &= dw_t - \theta_t dt \\ &= dw_t - \frac{f(S_t,t) - \mu(S_t,t)}{\sigma(S_t,t)} ds \end{aligned}$$

$\Leftrightarrow$

$$f(S_t,t)dt + \sigma(S_t,t)dw_t^* = \mu(S_t,t)dt + \sigma(S_t,t)dw_t$$

$$dS_t = f(S_t,t)dt + \sigma(S_t,t)dw_t^* \quad under\ Q$$

12 マルチンゲールによる派生証券価格理論

定理 [マルチンゲールによる派生証券の価格付け]
Claim X が Attainable であれば、プロセス S_t/B_tがマルチンゲールとなる確率測度 P と同値な Q のもとで派生証券の価格と安全資産価格との比 $C(S_t,t)/B_t$ は、マルチンゲールになる。
また逆に、S_t/B_tがマルチンゲールになる測度 Q が一意存在すれば、Claim X が Attainable であり、裁定取引は存在しない。

株価のプロセス

$$dS_t = \mu(S_t,t)dt + \sigma(S_t,t)dw_t, \quad S_t > 0$$

安全資産のプロセス

$$dB_t = r(t)B_t dt, \quad B_t > 0$$

12.1 同値マルチンゲール確率

S_t/B_tがマルチンゲールになる確率測度 Q を考える。

$$S_t^* = S_t/B_t$$

とおくと、

$$\begin{aligned} dS_t^* &= dS_t/B_t - S_t r(t)/B_t dt \\ &= \left(\frac{\mu(S_t^* B_t, t)}{B_t} - r(t)S_t^*\right)dt + \frac{\sigma(S_t^* B_t, t)}{B_t} dw_t \end{aligned} \tag{8}$$

そこで、

$$\theta_t = -\frac{\frac{\mu(S_t^* B_t, t)}{B_t} - r(t)S_t^*}{\sigma(S_t^* B_t, t)/B_t} = -\frac{\mu(S_t, t) - r(t)S_t}{\sigma(S_t, t)}$$

とおくと、Girsanov 定理から

$$dw_t^* = dw_t + \frac{\mu(S_t, t) - r(t)S_t}{\sigma(S_t, t)}dt$$

を (6) に代入すると、

$$dS_t^* = \frac{\sigma(S_t^* B_t, t)}{B_t}dw_t^* \tag{9}$$

S_t^*がマルチンゲールとなる Pと同値な測度 Q が

$$Q(d\omega) = Z_T P(d\omega))$$

で構成できた。
また、$S_t = S_t^* B_t$ に (7) を用いると

$$\begin{aligned} dS_t &= B_t dS_t^* + S_t^* dB_t \\ &= \sigma(S_t^* B_t, t)dw_t^* + r(t)S_t^* B_t dt \\ &= \sigma(S_t, t)dw_t^* + r(t)S_t dt \end{aligned}$$

Q のもとでは、株価のプロセスの drift 項は安全資産の増分になる。これは (5) と一致し、Q をリスク中立確率ともよぶ。

13 Girsanov の定理

確率変数列 $X_1, \cdots, X_n$が互いに独立で同一の正規分布 $N(0,1)$ に従う。
$(\alpha_n, \mathcal{F}_{n-1})$ は predictable 確率変数列とする。
新しい確率変数列 $(Z_n, \mathcal{F}_n)$ を

$$Z_n = \exp\{\sum_{k=1}^{n} \alpha_k X_k - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} {\alpha_k}^2\}$$

とすると、確率測度 Pのもとで、Z_nはマルチンゲールプロセスで、

$$EZ_n = 1, \quad n \geq 1$$

新しい確率測度 P_n^*を測度空間 $(\Omega, \mathcal{F}_n)$ に対して、

$$P_n^*(A) = E[I(A)Z_n], \qquad A \in \mathcal{F}_n$$

によって定義する。

Girsanov の定理
新しい確率変数列 $X_k^* = X_k - \alpha_k,\ k = 1, \cdots, n$ は、互いに独立で同一の正規分布 $N(0,1)$ に従う。

[証明] 確率測度 P_n^*に対する期待値を E^*とすると、新しい確率変数に対する特性関数は

$$
\begin{aligned}
E^* \exp\{i \sum_{k=1}^{n} \lambda_k X_k^*\} &= E[\exp\{i \sum_{k=1}^{n} \lambda_k X_k^*\} Z_n] && (10)\\
&= E[\exp\{i \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k X_k^*\} Z_{n-1} && (11)\\
&\cdot\ E[\exp\{i\lambda_n (X_k - \alpha_n) + \alpha_n X_n - \frac{\alpha^2}{2}\} | \mathcal{F}_{n-1}]] && (12)\\
&= E[\exp\{i \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k X_k^*\} Z_{n-1}] \exp\{-\frac{1}{2}\lambda_n^2\} && (13)\\
&= \cdots && (14)\\
&= \exp\{-\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2\} && (15)
\end{aligned}
$$

となり、互いに独立で同一の正規分布 $N(0,1)$ に従う。

13.1 Q のもとで C/B_tがマルチンゲール

Claim X が attainable とすると、

$$\exists\{\psi_t\} \quad s.t. \quad X = a_T S_T + b_T B_T$$

従って、Claim の時刻 t における価値は、

$$C(S_t, t) = a_t S_t + b_t B_t$$

ただし、$a_t = a_t(S_t), b_t = b_t(S_t, t)$
自己調達戦略より、

$$dC = a_t dS_t + b_t dB_t$$

だから、

$$d(\frac{C}{B_t}) = \frac{dC}{B_t} - \frac{C dB_t}{B_t^2} = a_t(\frac{dS_t}{B_t} - \frac{S_t dB_t}{B_t^2})$$

また、

$$dS^* = d(\frac{S_t}{B_t}) = \frac{dS_t}{B_t} - \frac{S_t dB_t}{B_t^2}$$

したがって、

$$d(\frac{C}{B_t}) = d(a_t S_t^* + b_t) = a_t dS_t^*$$

すなわち、

$$a_t S_t^* + b_t = a_0 S_0^* + b_0 + \int_0^t a_s dS_s^* \tag{16}$$

両辺を Q のもとでの期待値をとると、

$$E^*[a_t S_t^* + b_t] = a_0 S_0^* + b_0 + E^*[\int_0^t a_s dS_s^*]$$

ところが、(7) より、

$$E^*[\int_0^t a_s dS_s^*] = E^*[\int_0^t a_s \frac{\sigma(S_t, t)}{B_t} dw_s^*] = 0$$

従って、

$$E^*[a_t S_t^* + b_t] = a_0 S_0^* + b_0 \tag{17}$$

故に、派生証券と安全資産の価格比 $C(S_t, t)/B_t$ がマルチンゲールになることが示された。

13.2 $C(S_t, t)$ が満たす PDE

$$d(C/B_t) = \frac{1}{B_t}\{(C_x \mu + C_t + \frac{1}{2} C_{xx} \sigma^2 - rC)dt + \sigma C_x dw_t\}$$

は、Q のもとでは

$$dw_t = dw_t^* - \frac{\mu - rS_t}{\sigma}$$

を代入して、

$$d(C/B_t) = \frac{1}{B_t}\{(C_x r S_t + C_t + \frac{1}{2} C_{xx} \sigma^2 - rC)dt + \sigma C_x dw_t^*\}$$

$C(S_t, t)/B_t$はマルチンゲールなので、drift 項は 0 でなければならないので、

$$C_x r x + C_t + \frac{1}{2} C_{xx} \sigma^2 - rC = 0, \quad C(x, T) = X \tag{18}$$

これは、(3) と同等な派生証券が満たすべき PDE である。

13.3 複製戦略

$C(S_t,t)/B_t$が Q のもとでマルチンゲールならば、

$$d(C/B_t) = \sigma C_x/B_t dw_t^*$$

この式と (7) より、

$$\begin{aligned}\frac{C(S_t,t)}{B_t} &= \frac{C(S_0,0)}{B_0} + \int_0^t \frac{C_x(S_s,s)}{B_s}\sigma dw_s^* \\ &= \frac{C(S_0,0)}{B_0} + \int_0^t C_x(S_s,s)dS_s^*\end{aligned}$$

これを (8) と比較すると

$$a_t = C_x(S_t,t)$$

がえられる。さらに、

$$dC = C_x dS_t + (C_t + \frac{1}{2}C_{xx}\sigma^2)dt$$

に (10) を用いると

$$\begin{aligned}dC &= C_x dS_t + (rC - C_x rS_t)dt \\ &= a_t dS_t + \frac{C - a_t S_t}{B_t} dB_t\end{aligned}$$

従って、

$$b_t = \frac{C - a_t S_t}{B_t}$$

このポートフォリオは

$$dC = a_t dS_t + b_t dB_t$$

自己調達戦略を満たす複製戦略 $\{(a_t,b_t)\}$ がえられた。従って、この市場は完備である。

13.4 無裁定取引価格

同値マルチンゲール測度が存在すれば、派生証券価格には裁定取引がないことを示そう。
裁定取引が存在すると仮定すると、
初期投資は 0 以下で、

$$a_0 S_0 + b_0 B_0 \leq 0$$

$t = T$ において、

$$\Pr[a_T S_T + b_T B_T \geq 0] = 1$$

かつ

$$\Pr[a_T S_T + b_T B_T > 0] > 0$$

(9) より、

$$a_0 S_0 + b_0 B_0 = B_0 E^*[a_T S_T^* + b_T]$$

$a_T S_T^* + b_T$ の期待値は Q および P において仮定より正である。従って、

$$a_0 S_0 + b_0 B_0 > 0$$

これは裁定取引の仮定に矛盾する。故に、マルチンゲール測度が存在すれば裁定取引がない。

この結果から、Claim X の価格は、時刻 T における価値 $C(S_T, T) = g(S_T)$ が与えられるので、

$$\begin{aligned} C(S_t, t)/B_t &= E^*[g(S_T/B_T|\mathcal{F}_t] \\ C(S_t, t) &= \exp(-\int_t^T r(s)ds)E^*[g(S_T)|\mathcal{F}_t] \end{aligned}$$

と求められる。

Part III

金利の期間構造モデル

14　金利構造と金利感応証券の価格理論

14.1　はじめに

条件付き証券の価格理論を無倒産債券（ default-free bonds）の価格理論、即ち ”金利構造の理論 ”に応用する。そして、金利構造の理論がいかに債券先物や債券オプションのような金利感応証券の価格決定を述べる。

14.2　無倒産証券の裁定価格理論

この節では無倒産債券の価格理論を考えてみよう。無倒産債券の割引債としての１単位を、満期である決まった日に１円の支払が確実にある金融証券であるとしよう。仮定として、すべての満期の割引債の価格は N 次の ”状態変数 ”Y、の関数であり、現時点 t と満期時点 T に対して、 $S(Y(t), t; T)$ と記す。これらの状態変数はつぎの拡散過程に従う：

$$Y(t) = Y(0) + \int_0^t \beta(Y(s), s)ds + \int_0^t g(Y(s), s)dw(s), \quad \forall t,$$

ただし、w は確率 P の下での N 次の標準ブラウン運動で、βは $N \times 1$ ベクトル、g は $N \times N$ 行列とする。また、 g はすべての Y 、t および S に対してフルランクとし、S は Y と t の滑らかな関数とする。

割引債以外に、借入および預金が自由にできる安全利子率が存在するものとする。この利子率の瞬時の金利は、時刻 t には $r(Y(t), t)$ であるとすると、１円は時刻 t には、 $B(t) = \exp\{\int_0^t r(Y(s), s)ds\}$ となり、これを安全資産の価格プロセスとよぶ。記号の単純化ののために、これからはしばしば $S(Y(t), t; T)$ および $r(Y(t), t; T)$ をそれぞれ $S(t; T)$ および $r(t)$ と記す。

さて、満期が $T_1, T_2, \ldots, T_m$ である無倒産債券の割引債の１単位ずつの集まりを考えよう。ただし、 $m > N$ とする。一般性を失わずに、$T_1 < T_2 < \ldots < T_m$ と仮定できる。さらに、これらの割引債の価格は裁定取引機会がないものと仮定する。

裁定機会がないための必要条件は一意の同値マルチンゲール測度の存在である。すなわち, すべての満期 T_i ($i = 1,2,\ldots,m$) に対して、$S(t;T_i)/B(t)$ がマルチンゲールとなる確率測度 Q が存在する。伊藤の補題から、次の式が導ける、

$$
\begin{aligned}
d(S(t;T_i)/B(t)) = & \quad [-S(t;T_i)r(t)/B(t) + (\mathcal{L}S(t;T_i))/B(t) + S_t(t;T_i)/B(t)]dt \\
+ & \quad S_y(t;T_i)^\top g(Y(t),t)/B(t)dw(t),
\end{aligned}
\tag{19}
$$

ただし、

$$
\mathcal{L}S(t;T_i) = \frac{1}{2}\mathrm{tr}(S_{yy}(t;T_i)g(Y(t),t)g(Y(t),t)^\top) + S_y(t;T_i)^\top \beta(Y(t),t),
$$

tr は ”トレース ”を表し、S の添え字は S の偏微分を表す。また、$(\mathcal{L}S(t;T_i) + S_t(t;T_i))/S(t;T_i)$ は満期が T_i の割引債の時刻 t における瞬時の期待収益率となることが分かる。Girsanov の定理から、確率 Q の下では N 次のプロセス $\kappa(t)$ が存在し、

$$
w^*(t) = w(t) - \int_0^t \kappa(s)ds \quad t \in \Re_+, \tag{20}
$$

が標準ブラウン運動となる。(20) を (19) に代入すると、

$$
\begin{aligned}
d(S(t;T_i)/B(t)) = & \quad [-S(t;T_i)r(t)/B(t) + (\mathcal{L}S(t;T_i))/B(t) + S_t(t;T_i)/B(t) \\
& \quad +S_y(t;T_i)^\top g(Y(t),t)\kappa(t)/B(t)]dt \\
+ & \quad S_y(t;T_i)^\top g(Y(t),t)/B(t)dw^*(t),
\end{aligned}
\tag{21}
$$

となる。$S(t;T_i)/B(t)$ は、 Q の下ではマルチンゲールであるから、時間変化の項は存在しえない。従って、次の式が得られる。

$$
-S(t;T_i)r(t) + \mathcal{L}S(t;T_i) + S_t(t;T_i) + S_y(t;T_i)^\top g(Y(t),t)\kappa(t) = 0, \quad \forall t. \tag{22}
$$

故に、裁定機会が存在しない必要条件は、 N 次のプロセス κ が全ての満期 T_i に対して、 (22) を満足することである。異なる満期の割引債の数はブラウン運動の次元より大きい、即ち $M > N$ としたので、線形代数の初歩の知識から、 κ が一意的に決まることが分かる。さらに、満期は任意に選べるので、 κ は満期から独立でなければならない。従って、 κ は Y と t の関数でなければならない。そこで、$\kappa(t) = \kappa(Y(t),t)$ と記す。

以上から次のことが明らかとなった。もし $\kappa(Y(t),t)$ が分かったなら、(22) は $S(Y,t;T)$ が満たすべき次のとおりの偏微分方程式となる。

$$
-S(Y,t;T_i)r(Y,t) + \mathcal{L}S(Y,t;T_i) + S_t(Y,t;T_i) + S_y(Y,t;T_i)^\top g(Y,t)\kappa(Y,t) = 0, \quad \forall t \in [0,T_i)\forall Y. \tag{23}
$$

さらに、無倒産の割引債の１単位は満期日には、 1 円でなければならない。従って、 $S(Y,t;T_i)$ は境界条件を $S(Y,T_i;T_i)=1$ とする (23) の解である。

無倒産の割引債の価格に対する裁定アプローチは、要するに関数 $\kappa(Y,t)$ の定義に依存する。この定義は任意ではありえなく、 Girsanov の定理を満たすように関数 κ を選ばねばならない。即ち、任意の満期 $T>0$ に対して $E[\zeta(T)]=1$ となる κ を選ぶ。ただし、

$$\zeta(T)=\exp\left\{-\frac{1}{2}\int_0^T \kappa(Y(s),s)^\top \kappa(Y(s),s)ds+\int_0^T \kappa(Y(s),s)^\top dw(s)\right\}.$$

さらに、 $\kappa(Y,t)$ が上の式を満たすように選ぶと、

$$Q(A)=\int_A \zeta(\omega,T)P(d\omega)$$

が、状態変数 Y から得られる全ての事象 A に対して、 P に同値な確率となる。そこで、割引債の価格は、次式となる。

$$S(Y(t),t;T_i)=B(t)E_t^*[1/B(T_i)]=E^*[\exp\{-\int_t^{T_i} r(Y(s),s)ds\}|Y(t)],$$

ただし、$E_t^*[\cdot]$ は Q の下での時刻 t における条件付き期待値であり、第２の等号は Y のマルコフ性から得られる。そこで、容易に $S(t;T_i)/B(t)$ が Q の下で $S(T_i;T_i)=1$ を満たし、マルチンゲールになることが分かる。以上のように定義された全ての満期に対する割引債は、かくして無裁定価格システムをなすことになる。勿論、 S は Y と t に関して滑らかな関数であり、$S(Y,t;T_i)$ は、境界条件 $S(Y,T_i;T_i)=1$ を満たす (23) の解となる場合である。

１単位の割引債の価格に対して、満期前の時刻 $t<T_i$ の第 i 債券に対する最終利回り (yield-to-maturity) $R(Y,t;T_i)$ を次のように定義する。

$$S(Y,t;T_i)=\exp\{-R(Y,t;T_i)(T_i-t)\}.$$

従って、 $R(Y,t;T_i)=\frac{-\ln S(Y,t;T_i)}{T_i-t}$であり、時刻 t の最終利回り曲線 (*yield curve*) 即ち、時刻 t における ”金利構造 ”は、状態変数 Y が与えられたときの種々の満期 T_i に対する関数 $R(Y,t;T_i)$ にすぎない。

通常の利付き債は、割引債のポートフォリオにすぎないので、割引債の価格が分かれば利付き債の価格は容易に計算できる。

14.3 Cox-Ingersoll-Ross モデル

Cox, Ingersoll, Ross (1985) の金利構造の CIR モデルは前節で概説した裁定アプローチの応用である。状態変数 Y は１次元で、瞬時の安

全利子率 $r(t)$ と仮定する。さらに、 r は次のような平均復元 (mean reverting) プロセスに従うと仮定する。

$$r(t) = r(0) + \int_0^t k(\theta - r(s))ds + \int_0^t \sigma\sqrt{r(s)}dw(s), \qquad (24)$$

ただし、 w は１次元の標準ブラウン運動で、$k > 0, \theta > 0$ および and $\sigma > 0$ がその３つのパラメータである。θ は r の ”長期的平均 ”を表し、現在の利子率が長期的平均より低いときには、すぐに r をこの平均の方へ引き上げる。同様に現在の利子率が長期的平均より上にあるとき、すぐに r をこの平均の方へ引き下げる。k は平均復元の強さを表す。平均復元の時間的変化はブラウン運動のランダムショックによっても影響を受ける。ランダム　ショックのばらつきは、利子率の平方根と σ に比例する。利子率が高いときには、利子率の動きににより大きな不確実性が伴う。

均衡理論から、CIR モデルは次のように定める。

$$\kappa(r,t) = -\frac{\lambda}{\sigma}\sqrt{r},$$

ただし λ は正負いずれでもよい値である。利子率のプロセスははマルチンゲール測度の下では次のようになる。

$$r(t) = r(0) + \int_0^t (k+\lambda)(\frac{k\theta}{k+\lambda} - r(s))ds + \int_0^t \sigma\sqrt{r(s)}dw^*(s). \quad (25)$$

これもまた、長期的平均を $k\theta/(k+\lambda)$ とする平均復元プロセスとなる。確率 Q の下では、確率 P の下での３つのパラメータに加えて、さらに λ があることに注意されたい。

(23) の偏微分方程式はから

$$\frac{1}{2}\sigma^2 r S_{rr}(r,t;T_i) + S_r(r,t;T_i)[k(\theta - r) - \lambda r] + S_t(r,t;T_i) - rS(r,t;T_i) = 0, \qquad (26)$$

が得られ、その境界条件は $S(r,T_i;T_i) = 1$ である。この解は、次であることが確認できる。.

$$S(r,t;T_i) = A(t,T_i)e^{-rG(t,T_i)},$$

ただし、

$$\begin{aligned} A(t,T_i) &= \left[\frac{2\gamma e^{(k+\lambda+\gamma)(T_i-t)/2}}{(\gamma+k+\lambda)(e^{\gamma(T_i-t)}-1)+2\gamma}\right]^{2k\theta/\sigma^2}, \\ G(t,T_i) &= \frac{2(e^{\gamma(T_i-t)}-1)}{(\gamma+k+\lambda)(e^{\gamma(T_i-t)}-1)+2\gamma}, \\ \gamma &= \left[(k+\lambda)^2 + 2\sigma^2\right]^{1/2}. \end{aligned}$$

伊藤の補題を用いると、

$$dS(r,t;T_i) = r[1-\lambda G(t,T_i)]S(r,t;T_i)dt - G(t,T_i)S(r,t;T_i)\sigma\sqrt{r}dw(t).$$

が得られ、$\lambda < (>) 0$ のとき、次の瞬間に満期になっていない割引債の瞬時の期待収益率は、 r より大きい（小さい)。

時刻 t における満期が T_i の割引債の最終利回りは、

$$R(r,t;T_i) = [rG(t,T_i) - \ln A(t,T_i)]/(T_i - t),$$

となり、満期に近づくと、 $R(r,t;T_i)$ は r に収束する。また、非常に長い満期の時には、$R(r,t;T_i)$ の極限は次のとおりである。

$$\lim_{T_i\to\infty} R(r,t;T_i) = \frac{2k\theta}{\gamma + k + \lambda}.$$

さらに、$r < \theta$ の時には最終利回り曲線は一様に上昇する。r が $k\theta/(k+\lambda)$ より大きいとき、最終利回り曲線は一様に下落する。両者の中間の値の時に、最終利回り曲線は瘤状になる。

この CIR モデルは、例えば２つの瘤を作れないなど、一見では応用が限られているようにみえる。従って、実際に観測される最終利回り曲線をすべてこのモデルが解析できるようにはみえない。しかし、この欠点はパラメータを時間の関数にすることによって容易に解消する。例えば、θ を時間の関数にすると、瞬時の利子率のプロセスは、

$$r(t) = r(0) + \int_0^t k(\theta(s) - r(s))ds + \int_0^t \sigma\sqrt{r(s)}dw(s), \qquad (27)$$

となり、時刻 t における割引債の価格は、

$$S(r,t;T_i) = \hat{A}(t,T_i)e^{-G(t,T_i)r},$$

である。ただし、

$$\hat{A}(t,T_i) = \exp\left(-k\int_t^{T_i} \theta(s)G(s,T_i)ds\right).$$

そこで、最終利回り曲線は関数 $\theta(t)$ に依存して任意の形状をとりうる。

このモデルを応用するためには、無倒産債券の観測される価格からパラメータを推計する必要がある。

14.4　金利感応証券の価格決定

金利構造の理論は割引債の価格決定ばかりでなく、一般の金利感応証券の価格決定にも有効である。いまからは、CIR モデルに従い、そのパラメータ k, θ, σ, および λ が既知であるとしよう。

無倒産割引債のヨーロッパ型コールオプションを考える。債券の満期は T_i であり、コールオプションの満期と行使価格はそれぞれ $T < T_i$ と $K > 0$ とする。コールオプションの時刻 t における価格を $C(t)$ と記す。利子率の不確実性を生むただ１つのブラウン運動にたいして、多くの異なる満期の債券が存在するので、動的に完備な市場である。したがって、このオプションは裁定によって価格が決まる。裁定機会のない価格はマルチンゲールとなるので、

$$
\begin{aligned}
C(t) &= B(t)E_t^*[\max[S(r(T),T;T_i)-K,0]/B(T)] \\
&= E^*\left[\exp\{-\int_t^T r(s)ds\}\max[S(r(T),T;T_i)-K,0]|r(t)\right],
\end{aligned}
$$

ただし、第２の等号は r の Q の下でのマルコフ性からえられる。同値マルチンゲール測度の下での r の推移確率は、知られているので (CIR, p.391 を参照)、上記の期待値は求めることができる。興味のある読者は、その式を (CIR, p.396) を見られたい。

同じ原理で、”任意の ”金利感応証券の価格を決定することができる。$\phi(t)$ を時刻 0 から t までの r の履歴に依存するランダムな時刻 t のキャッシュフローとする。単純化のために、 $\phi(t)$ は、有限時点 $t_1, t_2, \ldots, t_n$ 以外では、零であるとする。時刻 t での $\phi(t_i)$ の価格は、

$$
E_t^*\left[e^{-\int_t^{t_i} r(s)ds}\phi(t_i)\right].
$$

ただし、$t_i > t$ である。従って、時刻 t のこの証券の価格は、

$$
\sum_{t_i>t} E_t^*\left[e^{-\int_t^{t_i} r(s)ds}\phi(t_i)\right].
$$

この一般的な金利感応証券の具体例は、モルゲージを集めたものに対する証券 *Mortgage-Backed Securities*である。この例では、集められたモルゲージの利息と元金の受取から発生するキャッシュフローが、 $\phi(t_i)$ である。このような証券の価格を決定するためには、次の２つだけが必要である。確率 Q の下での無倒産利子率のパラメータおよび集めたモルゲージが生むキャッシュフローの予測である。

14.5 金利感応証券の先物および先渡価格

割引債の先物や先渡契約のような、連続的に変わる金融契約の価格について考えてみよう。議論を具体的に進めるために、CIR モデルを用いる。

先渡契約とは、ある財または証券を将来の決まった日、”満期 ”に、現在の”先渡価格”で売買する契約である。満期には、先渡価格は財または証券の現物価格に等しい。

満期が T_i の割引債に対して考えてみよう。この債券の売買を限月受渡日 ”満期 ” $T < T_i$ に行なう先渡価格の時刻 t における価格を $F(t)$ とする。金銭の授受は先渡し契約をする段階ではないので、時刻 t の投資額は零である。従って、時刻 T における受取 $S(r, T; T_i) - F(t)$ の時刻 t の価値は零でなければならない。数学的には、$F(t)$ のこの条件は次のようにかける。

$$E_t^*[e^{-\int_t^T r(s)ds}(S(r(T), T; T_i) - F(t))] = 0.$$

$S(t; T_i)/B(t)$ は Q の下でマルチンゲールであるから、$E_t^*[e^{-\int_t^T r(s)ds}S(r(T), T; T_i)] = S(r(t), t; T_i)$. また、 $F(t)$ は時刻 t に決められているので、

$$E_t^*[e^{-\int_t^T r(s)ds}F(t)] = F(t)E_t^*[e^{-\int_t^T r(s)ds}] = F(t)S(r(t), t; T),$$

となる。ただし、第 2 の等号は $S(r(T), T; T) = 1$ から得られる。時刻 T に割引債は満期になるからである。従って、

$$F(t) = S(r(t), t; T_i)/S(r(t), t). \tag{28}$$

となる。かくして、時刻 t の割引債に対する先渡価格はその時の債券価格で決定される。(28) から明らかなように、 $F(t)$ はパラメータ T および T_i 以外に、$r(t)$ と t の関数である。

さて、先物価格を考えてみよう。先物契約とは、ある財または証券を満期日に売買する契約であり、契約するときに ”先物価格 ”で売買すると定める。満期日には、先物価格は現物価格と等しい。契約時には、金銭の交換はない。しかし、その後先物価格の変動に従い、契約者間に支払義務が発生する。満期日の財または証券の売買は、その時点の現物価格で行なわれる。はじめの先物価格と現物価格の差の支払（受取）と契約期間中の清算された額がこの契約の金銭の授受となる。従って、先物価格は残存期間中の支払が常に零になるように連続的に変化しなければならない。

$f(r, t)$ を限月受渡日 T に 1 単位の割引債に対する時刻 t の先物価格としよう。割引債の満期日は先物の満期日、つまり限月受渡日より長い、$T_i > T$ と仮定する。さらに、 $f(r, t)$ を $r(t)$ に関して 2 回微分可能で t に関して 1 回微分可能な関数とする。

定義から、時間 $[s, s + ds]$ における先物契約から発生するキャシュフローはその期間の先物価格の変化 $df(r(s), s)$ に等しい。初期の投資額

は零であるから、すべての $s \in [t,T]$ に対するキャシュフローの時刻 t における現在価値はまた零でなければならない。従って、

$$E_t^*\left[\int_t^T e^{-\int_t^s r(\tau)d\tau} df(r(s),s)\right] = 0.$$

f は連続関数で、利子率の実現値も時間の連続関数であるから、部分積分によって、

$$f(r(t),t) = E_t^*\left[e^{-\int_t^T r(\tau)d\tau} f(r(T),T) + \int_t^T e^{-\int_t^s r(\tau)d\tau} r(s)f(r(s),s)ds\right], \tag{29}$$

が得られ、両辺に $e^{-\int_0^t r(\tau)d\tau}$ をかけ、$\int_0^t e^{-\int_0^s r(\tau)d\tau} r(s)f(r(s),s)ds$ を加えると、

$$\begin{aligned} & e^{-\int_0^t r(\tau)d\tau} f(r(t),t) + \int_0^t e^{-\int_0^s r(\tau)d\tau} r(s)f(r(s),s)ds \\ = \quad & E_t^*\left[e^{-\int_0^T r(\tau)d\tau} f(r(T),T) + \int_0^T e^{-\int_0^s r(\tau)d\tau} r(s)f(r(s),s)ds\right], \end{aligned} \tag{30}$$

が得られる。上の式の右辺はフィクスされた確率変数の条件付き期待値であるので期待値のチェーンオペレイションにより、 Q の下でマルチンゲールになる。従って、左辺もまた Q の下でマルチンゲールとなる。そこで、左辺に伊藤の補題をもちい、さらに Q の下でマルチンゲールであることから、これの時間変化の項は零でなければならない。従って、

$$\frac{1}{2}f_{rr}(r,t)r\sigma^2 + f_r(r,t)[k(\theta - r) - \lambda r] + f_t = 0, \tag{31}$$

が f の満たす偏微分方程式となる。境界条件は先物契約の満期日に先物価格は現物価格に等しくなければならないことから得られる。即ち、$f(r,T) = S(r,T;T_i)$ である。容易にこの境界条件を満たす (31) の解は、

$$f(r(t),t) = E^*[S(r(T),T;T_i)|r(t)], \tag{32}$$

であることを確認できる。従って、先物価格のプロセスは、マルチンゲール測度の下のマルチンゲールとなる。これは永続証券に対するマルチンゲールの結果、即ち価格のプロセスは（安全資産で割った） Q の下でマルチンゲールになるという結果とは異なる。なぜなら、先物価格は永続証券の価格ではなく、それは、連続的に清算される金融契約の価格であるからである。

確率 Q の下で、 r の推移確率は知られているので、(32) の期待値は求められる。興味のある読者は試みられたい。この解析的な解は、はじめに仮定したように r に関して２回微分可能で、t に関して１回微分可能な関数である。

14.6 References

1. Cox, J., J. Ingersoll, and S. Ross. 1985. A theory of the term structure of interest rates, *Econometrica* **53**:385-407.

2. Brennan, M., and E. Schwartz. 1979. A continuous time approach to the pricing of bonds. *Journal of Banking and Finance* **3**:133-155.

3. Heath, D., R. Jarrow, and A. Morton. 1988. Bond Pricing and the term structure of interest rates: a new methodology. Unpublished manuscript, Cornell University.

4. Ho, T., and S. Lee. 1986. Term structure movements and pricing interest rate contingent claims. *Journal of Finance* **41**:1011–1028.

5. Huang, C., 1989, *Lecture Notes on Advanced Financial Economics*, Sloan School of Management, Massachusetts Institute of Technology.

6. Richard, S. 1978. An arbitrage model of the term structure of interest rates. *Journal of Financial Economics* **6**:33–57.

7. Vasicek, O. 1977. An equilibrium characterization of the term structure. *Journal of Financial Economics* **5**:177-188.