確率論（第4講）

ベイズの定理・独立性

確率論の応用で重要となる確率変数の概念について理解する。

ポイント

確率変数の定義、確率分布関数、確率密度関数

平均値、分散とは（後にモーメントの概念に一般化）

条件付確率(*Conditional Probability*)

- 事象*B*の生起を条件とする事象*A*の条件付確率P(*A*|*B*)が次のように定義される。

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \qquad 但し\ P(B) \neq 0$$

- 同様に、事象*A*の生起を条件とする事象*B*の条件付確率P(*B*|*A*)は次のように定義される。

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \qquad 但し\ P(A) \neq 0$$

例題

	喫煙者	非喫煙者
肺癌になる	1200	300
肺癌にならない	1900	6600

上記統計をもとに次の問いにこたえなさい

喫煙者の割合

肺がんにならない割合

喫煙者が肺癌になる割合

非喫煙者が肺癌になる割合

例題２

	男性	女性
地図を見る	0.25	0.14
道を尋ねる	0.12	0.28
運転を続ける	0.13	0.08

道に迷った男性ドライバが道を尋ねる確率

道に迷ったドライバーが地図を見る確率

性別と道に迷ったら地図を見ることは独立か

ベイズ則(*Bayes' Rule*)

- 先の2つの式から

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$$

$$P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A)}$$

がなりたつ。

＃何の変哲もない式と思うかもしれないが、実は偉大な式である。
ベイズ則とよばれ統計的決定理論、推定理論の基礎となる。

全確率 (*Total Probability*)

相異なるiとjに対して$A_i \cap A_j = \phi$かつ

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = S$$

であれば

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B \cap A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(B \mid A_i) P(A_i)$$

$$B = B \cap S = B \cap (A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n)$$

$$= (B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup \ldots \cup (B \cup A_n)$$

$(B \cap A_i)$と$(B \cap A_j)$の共通集合はϕなので

$$P(B) = P(B \cap S) = \sum_{i=1}^{n} P(B \cap A_i)$$

ベイズ則（2）

- 先のベイズ則でAをA_iとし、Bに対する全確率の表現を使うと次式が導かれる。

$$P(A_i \mid B) = \frac{P(B \mid A_i)P(A_i)}{\sum_{k=1}^{n} P(B \mid A_k)P(A_k)}$$

ベイズの定理例題

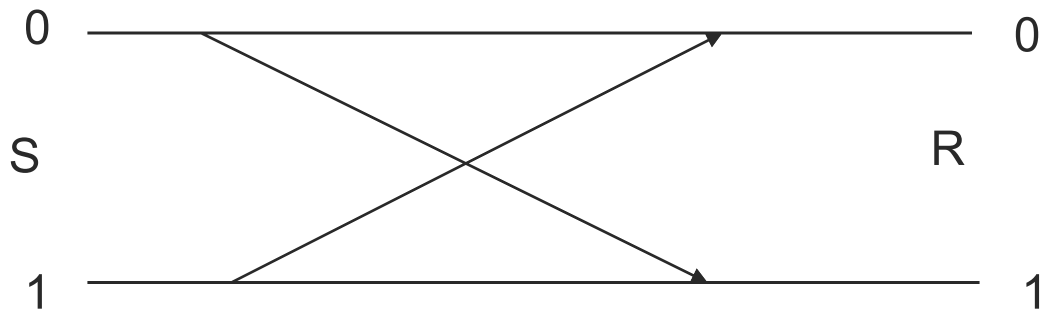
- A: ある人が癌である事象
  B:癌検診で陽性となる事象　とする。

検診による癌の検出率つまりP(B|A)は0.99、癌でないことの検出率P(notB|notA)も0.99また癌の発生率は0.1%であるとする。このとき検査で陽性になった人が癌である確率を計算してみよう。

	A癌である	癌でない	
B検査で陽性	0.001X0.99 =0.00099	0.00999	0.01098
検査で陰性	0.00001	0.999X0.99 =0.98901	0.98902
	0.001	0.999	1

P(A|B)=0.00099/0.01098=0.09016

例題　バイナリーデータ通信



S0: 0を送った, S1: 1を送った, R0:0を受信, R1: 1を受信した事象とする

P(S0)=0.5, P(R0|S1)=0.2, P(R1|S0)=0.1とする。

（1）P(R0)、P(R1)を求めなさい。
（2）0を受信したとき送信データが0である確率を求めなさい
（3）1を受信したとき送信データが1である確率を求めなさい
（4）誤り率を求めなさい。

独立な事象(*Independent*)

- 事象AとBは次の条件を満たす時互いに独立であるという。

$$P(A|B)=P(B|A)$$

または

$$P(A\cap B)=P(A)P(B)$$

＃上の式から下の式、下の式から上の式が導かれるとこを確かめよう。

独立性（２）

３つの事象A,B,Cが互いに独立であるとは次の関係を満たす場合を言う

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cap P(B) \cap P(C)$$

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

$$P(A \cap C) = P(A)P(C)$$

$$P(B \cap C) = P(B)P(C)$$

#　２つのペア同士が独立であるだけでは独立と言えないことに注意

独立性（3）

n個の事象A_i, i=1,…n が互いに独立であるとは次の条件を満たすことを言う。

1,…,nからk個（k=2,…,n)の相異なる整数を取り出しi_1,…,i_kとする。

i_1,…,i_k　全ての組み合わせに対して

$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2})\ldots P(A_{i_k}) \qquad k = 1,\ldots,n$$

が成立する。

排反事象と独立事象の違い

独立事象の場合

$$P(\bigcap_{i=1}^{n} A_i) = \prod_{i=1}^{n} P(A_i)$$

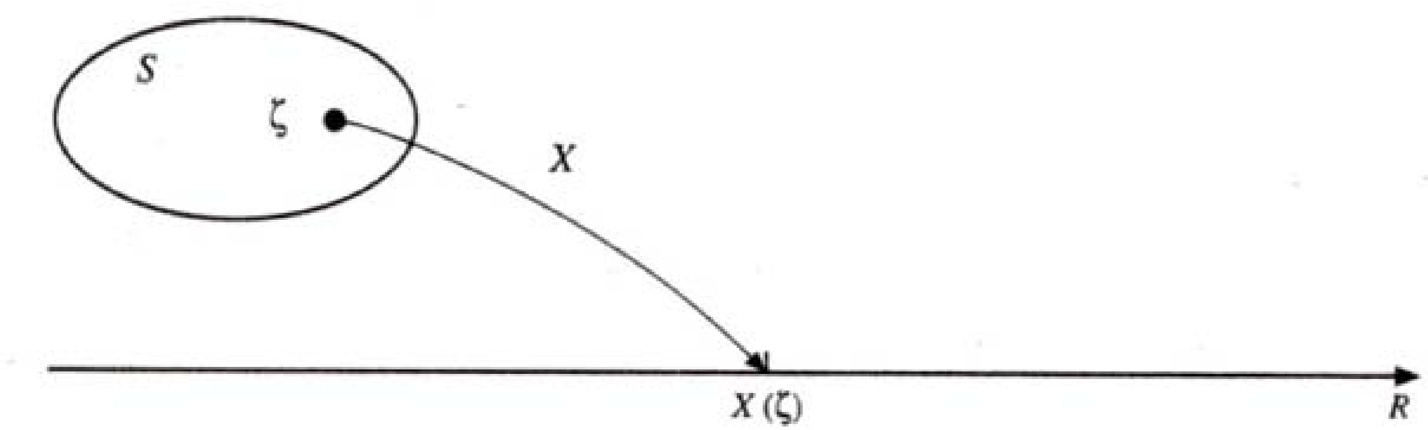
排反事象の場合

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

まとめ

- 集合論を基にした確率論の基本的な考え方について学んだ。
- 重要な概念
  - ランダム実験、標本空間、事象、確率の公理、条件付確率、ベイズの定理、全確率、独立事象

確率変数とは



標本空間をSとする実験を考える。 確率変数X(ζ)とはSのそれぞれの元ζを確率変数X(ζ)の値と呼ばれる実数に対応させる関数である。

確率変数は実は“変数”ではなく“関数”なのだが慣例的にこう呼ばれる。

確率変数の例

コイン投げの例を考えようたとえば

X(H)=1, X(T) =0

のように確率変数を定義することができる。 同一標本関数から複数の確率変数の定義が可能であり、この例でも

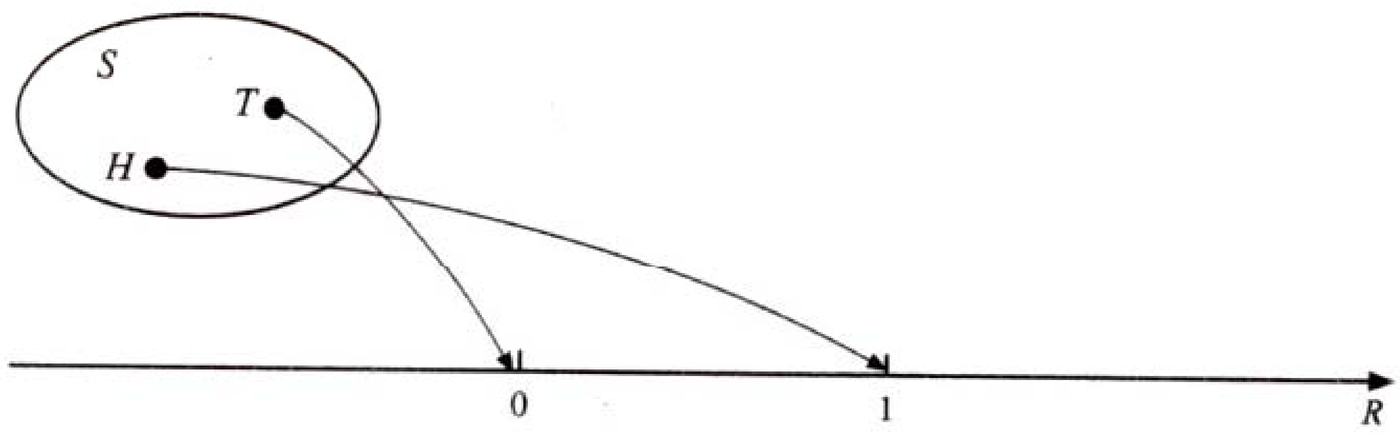
Y(H)=0, Y(T)=1 や

Z(H)=0, Z(T)=0 など異なる確率変数を定義することも可能である。

一口メモ

確率変数は英語でrandom variable という。 確率変数X という時にr.v. Xと略して書いたりすることがある。

確率変数の例(つづき)



確率変数X(ζ)の例

演習

さいころ投げの実験について各自ひとつの確率変数を定義し、上と同様に図示しなさい。

確率変数によって定義される事象

Xが確率変数でありx(小文字)を実数値とするとき事象(X＝x)を下記のように定義することができる。

$$(X = x) = \{\zeta : X(\zeta) = x\}$$

同様に次のような事象も定義できる。

$$(X \leq x) = \{\zeta : X(\zeta) \leq x\}$$
$$(X > x) = \{\zeta : X(\zeta) > x\}$$
$$(x_1 < X \leq x_2) = \{\zeta : x_1 < X(\zeta) \leq x_2\}$$

確率変数によって定義される事象2

確率変数によって定義される事象に対して下記のように確率を定義することができる。

$$P(X = x) = P\{\zeta : X(\zeta) = x\}$$

$$P(X \le x) = P\{\zeta : X(\zeta) \le x\}$$

$$P(X > x) = P\{\zeta : X(\zeta) > x\}$$

$$P(x_1 < X \le x_2) = P\{\zeta : x_1 < X(\zeta) \le x_2\}$$

例題

コインを３回なげる実験の標本空間SはS={HHH,…,TTT}と８つの要素からなる集合である。

確率変数Xを、出た表（H）の数として定義する。 例えばX(HTH)=2となる。 このとき P（X=2)及びP(X<2)を求めなさい。

分布関数

確率変数Xの確率分布関数(cdf: cumulative distributed function)が次のように定義される。

$$F_X(x) = P(X \leq x) \qquad -\infty < x < \infty$$

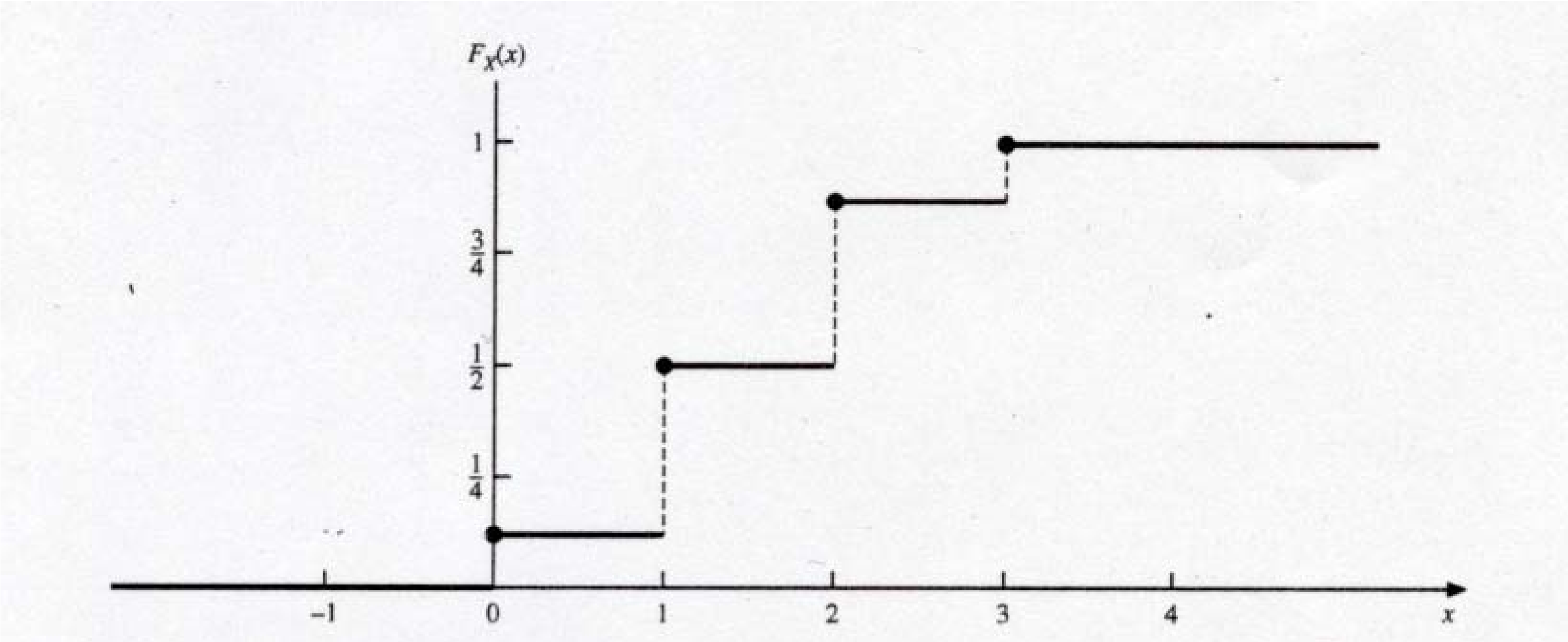
＃確率変数Xの性質はこの確率分布関数によって定まる。

分布関数の例

３回コインを投げる実験においてXを表が出る数としたとき、Xの確率分布関数は下記のようになる。

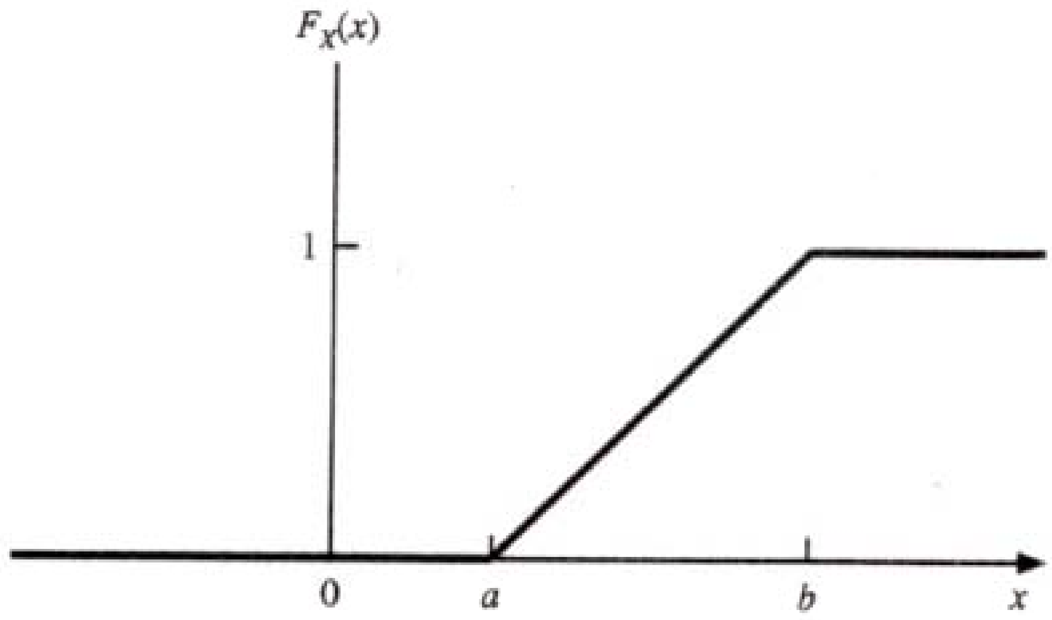
x	$(X \le x)$	$F_X(x)$
-1	$\varnothing$	0
0	(TTT)	$\frac{1}{8}$
1	$(TTT, TTH, THT, HTT\}$	$\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$
2	$\{TTT, TTH, THT, HTT, HHT, HTH, THH\}$	$\frac{7}{8}$
3	S	1
4	S	1

分布関数の例



先の例の分布関数を図示すると上のようになる。

確率分布の例（連続の場合）



確率分布関数の性質

1. $0 \leq F_X(x) \leq 1$
2. $F_X(x_1) \leq F_X(x_2) \qquad \text{if } x_1 < x_2$
3. $\lim_{x \to \infty} F_X(x) = F_X(\infty) = 1$
4. $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = F_X(-\infty) = 0$
5. $\lim_{x \to a^+} F_X(x) = F_X(a^+) = F_X(a) \qquad a^+ = \lim_{0 < \varepsilon \to 0} a + \varepsilon$

確率分布にもとづく種々の確率の計算

$$P(a < X \le b) = F_X(b) - F_X(a)$$

$$P(X > a) = 1 - F_X(a)$$

$$P(X < b) = F_X(b^-) \qquad b^- = \lim_{0<\varepsilon\to 0} b - \varepsilon$$

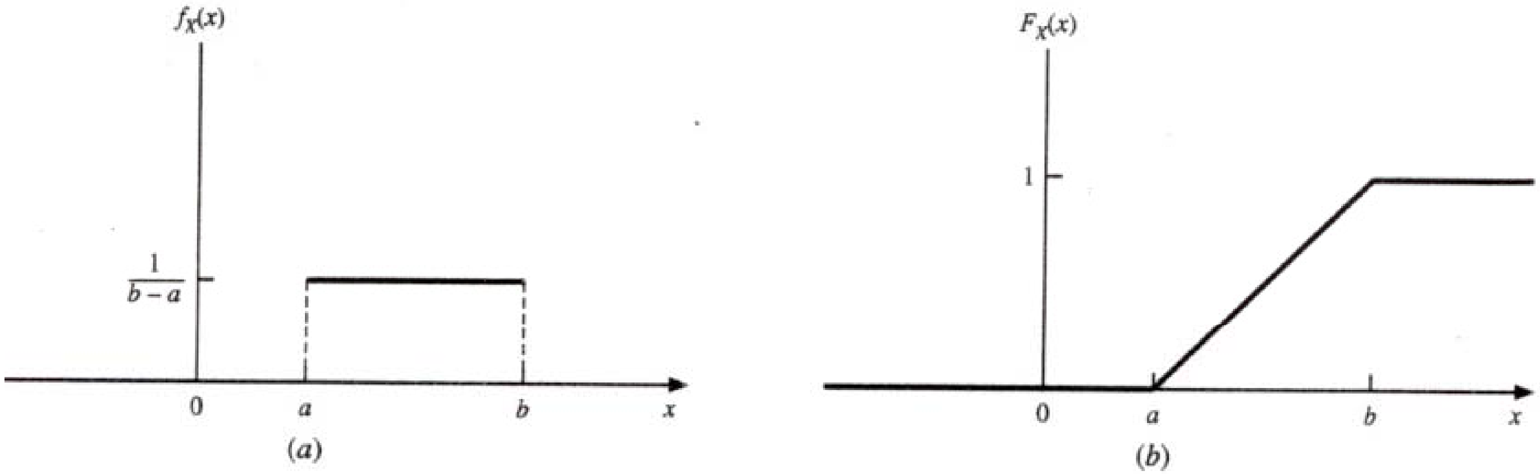
確率密度関数

確率分布関数F_X(x)に対して確率密度関数（pdf: probability density function)が下記のように定義される

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx}$$

確率分布関数、確率密度関数の例1

一様分布



確率密度関数の性質

確率密度関数pdfは下記のような性質を持つ

$$f_X(x) \geq 0$$

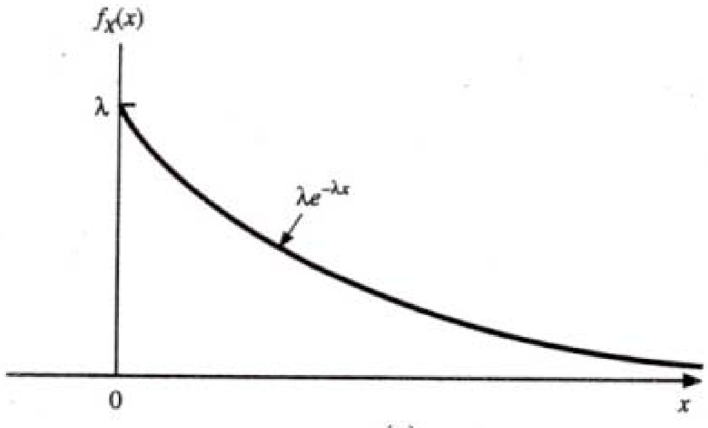
$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx = 1$$

$$P(a < X \leq b) = \int_a^b f_X(x)\,dx$$

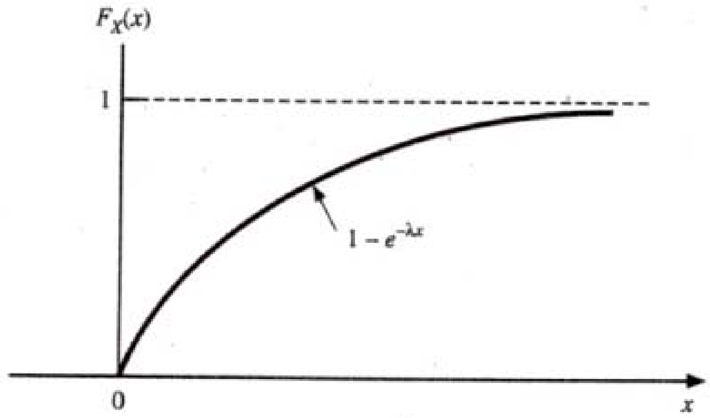
$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(\xi)\,d\xi$$

確率分布関数、確率密度関数の例2

指数分布



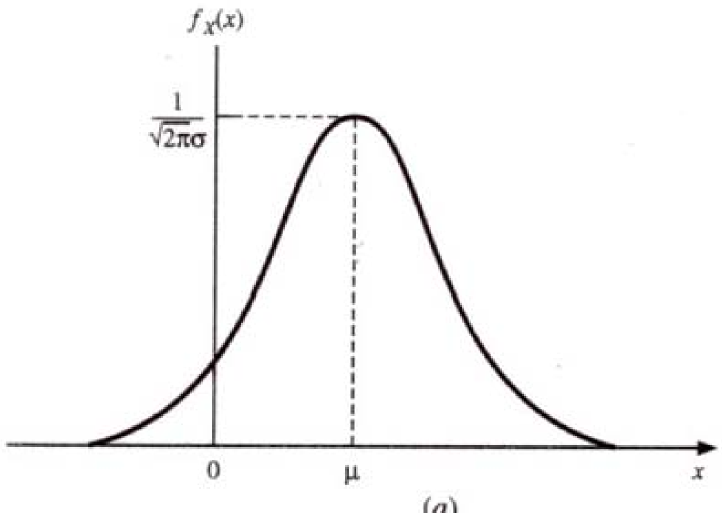
(a)

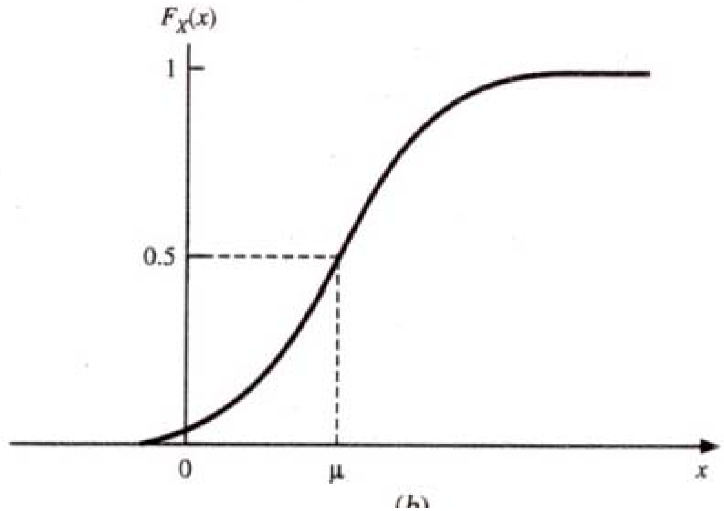


(b)

確率分布関数、確率密度関数の例3

正規分布





要約

確率変数とその特徴づけについて学んだ。

次の点を十分復習しておくように。
(1)確率変数とはなにか
(2)確率変数と標本空間、事象の関係
(2)確率分布関数とその性質
(3)確率密度関数とその性質